## §5 圆环上解析函数的洛朗展式及孤立奇点

### §5.1 圆环上解析函数的洛朗展式

一、双边幂级数的收敛性

Def. 由两个数列 $\{C_n\}\{C_{-n}\}$ 所确定的下列形式的函数项级数:

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n = \cdots + \frac{C_{-1}}{z-a} + C_0 + C_1(z-a) + \cdots$ 称为 $z-a$ 的双边幂级数.

2. 双边幂级数的收敛圆环

已知双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n} \xrightarrow{\frac{1}{z-a}=\xi} \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}\xi^n$, 若 $\exists\ \frac{1}{r}>0$ s.t. $|\xi|<\frac{1}{r}$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\cancel{\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}}\ C_{-n}\xi^n$ 绝对且内闭一致收敛, 进而当 $|z-a|>r$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ 绝对且内闭一致收敛.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$, $\exists\ R\geqslant 0$ s.t. $|z-a|<R$ 时 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-a)^n$ 绝对且内闭一致收敛.

当 $0\leq r<R$ 时 双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ 在圆环 $D: r<|z-a|<R$ 上绝对且内闭一致收敛.

于是双边幂级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n$ 在收敛圆环 $D$ (若存在) 上的和函数解析, 且可以逐项求导.

二. 圆环上解析函数展成洛朗级数.

Thm. 设 $f(z)$ 在 $D: r<|z-a|<R$ 上解析, 则 $\forall z\in D$ 有

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n(z-a)^n,\ \text{这里}\ C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi,\ n=0,\pm1,\cdots$$

$r<\rho<R$.

Pf. $\forall z \in D$，作 $\Gamma_{\rho_1}: |\zeta - a| = \rho_1$，$\Gamma_{\rho_2}: |\zeta - a| = \rho_2$，其中：

$r < \rho_1 < |z-a| < \rho_2 < R$

由复围线 $\Gamma_{\rho_2} + \Gamma_{\rho_1}^{-1}$ 上的柯西积分公式，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_2}+\Gamma_{\rho_1}^{-1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

$$= I_1 + I_2$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{\left(1 - \frac{z-a}{\zeta - a}\right)(\zeta - a)} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$$

其中 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(z-a)\cdot \frac{z-\zeta}{z-a}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{-(n+1)}}{(z-a)^{n+1}}$$

其中 $C_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_{\rho_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-(n+1)}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{-(n+1)}} d\zeta$.

Rem. (1) Laurent 定理中展开式称为 Laurent 展式，$C_n$ 称为 Laurent 系数.

(2) 若 $f(z)$ 在 $H: r < |z-a| < R$ 上展成双边幂级数，则这个双边幂级数只能是其 Laurent 级数.
(证法同于泰勒级数的唯一性)

(3) $f(z)$ 在 $H: r < |z-a| < R$ 上解析，在 $|z-a| \le r$ 上也解析，则 $C_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = 0 \ (n = -1, -2, \cdots)$

这时 $f(z)$ 的 Laurent 级数变为：

$f(z) = C_0 + C_1(z-a) + \cdots$ 为泰勒级数.

(4) $0 \le r < +\infty$，$0 < R \le +\infty$，$0 < |z-a| < +\infty \Leftrightarrow |z-a| > 0$

例1 (1) $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ 在 $|z|>0$ 上的洛朗展式：$f(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!\,z^n}$

(2) $f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $|z|>0$ 上的洛朗展式：$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots$

例2 将 $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-1)}$ 在下列圆环展成洛朗展式：

(1) $1<|z|<2$ (2) $|z|>2$

(3) $0<|z-2|<1$ (4) $|z-2|>1$

Sol. $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-1)}=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-1}$

(1) $1<|z|<2$ 时，$f(z)=\frac{-1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{2^n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

(2) $|z|>2$ 时，$f(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}}-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n-1}{z^{n+1}}$$

(3) $0<|z-2|<1$ 时，$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2+1}=\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n$

(4) $|z-2|>1$ 时，$f(z)=\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^{n+1}}$